

# 计算机艺术中的数学问题\*

李华山

(北方工业大学 CAD 研究中心 北京)

**摘要** 本文旨在讨论计算机艺术中的某些数学问题。计算机艺术与通常艺术作品不同之处在于它特有的数学结构,因而数学模型与方法在理论与实践中都起着重要作用。本文对诸如几何模型、数学变换、迭代算法、动画等某些实用技巧作了概述,还介绍了关于审美准则的数学描述。

**关键词** 计算机艺术,数学模型,审美准则

## 1 引言

著名物理学家、诺贝尔物理奖获得者李政道先生说<sup>[1]</sup>：“…科学和艺术是不能分割的，她们的关系是与智慧和情感的二元性密切关联的……，艺术和科学事实上是一个硬币的两面。它们源于人类活动最高尚的部分，都追求着深刻性、普遍性、永恒和富有意义。”

从科学与艺术融合的角度来说，计算机艺术极好地体现了“一个硬币的两面”。它的兴起除了因为它有广泛的应用，还在于这种艺术给人以无穷的魅力和深沉的思考。它对人类社会的物质文明和精神文明建设，将产生巨大的影响。

计算机艺术作为一个独立的、被认可的分支，仅有将近 20 年的历史<sup>[2]</sup>。

计算机艺术是计算机技术进步的产物。开始时，计算机只是“计算”机：它可以瞬间完成千百万次四则运算，但不能绘图。后来，计算机屏幕上可以显示出一个点，于是，“点动成线，线动成面，面动成体，”工程绘图应运而生，作为计算机的输出，不仅是数据表格，还可以是机械零部件、建筑物各种剖面或透视的图纸，这是巨大的技术进步。不过，工程图纸还缺少“艺术细胞”，还难以称作是艺术品。直到计算机表

现载体的质感、纹理、光照、运动等效果达到了手工做不到的程度，人们才开始承认计算机艺术这一分支。

从计算机工程绘图到计算机美术作品，并没有严格的时间界限。60 年代初，美国开始举办与计算机艺术有关的学术会议和展览。在每年一次的 SIGGRAPH 及欧洲图形学会议上计算机艺术的内容占有重要地位；1973 年日本主办了首届计算机艺术展；至 1995 年国际电子艺术大会已举行 6 届；1994 年中国计算机学会主办的首届全国计算机艺术学术研讨会汇集了国内大部分有关成果<sup>[3],[4]</sup>。此外，名目繁多的期刊、巡回展示、艺术设计软件工具、存贮在光盘上的艺术品使人目不应暇。

计算机艺术作品引人注目的成功，首先表现在真实感景物的生成。毋庸置疑，计算机生成以假乱真的静态和动态画面，在仿真模拟、工业控制、影视制作等领域有巨大的应用价值。然而，计算机艺术还应超越这一写实的局限，形成自己独特的艺术语言和符号。从艺术品的计算机辅助制作，向计算机辅助创意方向发展，这是富有挑战性的课题。

本文讨论的计算机艺术，着重在计算机美术方面，而不涉及计算机音乐、舞蹈设计等内容。计算机艺术应是计算机图形学的自然引伸。从广义上说，计算机图形学研究的是在计算机上实现“形”与“数”的

\* 国家自然科学基金资助项目

收稿日期：1995.11.26

表达及揭示形与数的关联与转化的理论与方法,而形与数则是数学研究的永恒主题。因此,我们就计算机艺术相关的若干数学问题提出几点看法,内容涉及几何造型、动画技术、视幻与透视、美学标准等,目的是探讨计算机艺术中的数学模型问题。

## 2 从绘画的形式三要素谈起

不论是哪类绘画,都具有形式三要素:造型、色彩、构图。绘画作品的造型和色彩是指画面中角色(如人物、家具、背景等)的局部表现,称之为“两个单元”。构图则称之为“关系”。“关系”起着核心与枢纽的作用。计算机辅助构图至关重要,它的研究刚刚开始。计算机造型相比发展较快,它遵循点线面体的几何规律形成各种模型。

### 2.1 调配函数方法

当有序型值点列 $\{P_i\}_{i=0}^n$ 给定,拟合曲线为:

$$P(t) = \sum_j P_j \varphi_j(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

$\{\varphi_j(t)\}$ 是适当选取的调配函数,它们满足一定的条件<sup>[5]</sup>。当 $\varphi_i(t)$ 选取为 Bernstein 多项式、B 样条函数或是适当的有理函数时,将分别产生 Bezier 曲线、B 样条曲线或 NURBS 曲线<sup>[6]</sup>。为了改善逼近性能,可以引进盈亏修正<sup>[7]</sup>和多结点技巧<sup>[8]</sup>,使之在动画片制作和平面图案生成这样一类艺术设计中得到有效的应用<sup>[9]</sup>。曲面的表达通常按张量积形式对点阵型值数据 $\{P_{ij}\}$ 生成曲面

$$S(u, v) = \sum_i \sum_j P_{ij} \varphi_i(u) \psi_j(v), \\ a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$$

其中 $\{\varphi_i\}$ 、 $\{\psi_i\}$ 为调配函数。在复杂区域上作三角剖分的造型技术对 CAGD 是很重要的,但在艺术设计中,较多采用张量积形式。

### 2.2 数学变换方法

平面构成与立体构成中的造型,过去都是手工完成。在计算机上采用数学变换可以产生大量的、不同类型的方案供用户选择。

投影是工程绘图的基本方法。艺术设计中采用简单的投影操作能完成多种奇妙的平面图案。例如将二元函数 $z=f(x, y)$ 用等值控制色彩绘制区域,并设定色彩与象素的依赖关系,便可从 $f(x, y)=c_i$ ( $c_i$ 为一系列指定常数)得到平面色彩图案。造型的关键是 $f(x, y)$ 的选定。采用不同频率的周期函数进行叠

加,造成多方连续对称的图案;利用衰减函数渐近性质,可以使函数在大范围缓变,形成画面的均衡与动势。

仿射变换 $X' = AX + b$  ( $X', X, b \in R^d, A$ 为 $d \times d$ 矩阵)使给定画面上 $X$ 点变换到 $X'$ 点,相应地将 $X$ 点的颜色、灰度、光亮度等转换到 $X'$ 处。在平面构成的实践中,仿射变换可以表现重复、相似、渐变、发射、对比、密集等技法<sup>[9]</sup>。

艺术设计者借助非线性变换造成的混沌产生独特的意境,这只有在计算机上才能实现。复平面上的非线性迭代映射的典型生成作品是众所周知的 Mandelbrot 集合和 Julia 集合。对象素点赋予 RGB 数值,对非线性离散动力系统参数分析来说,其根据是几何尺度。对艺术设计而言,可以独立于它的迭代过程,这种作法超出了原来的科学含义,但从审美角度来说是一类新颖的推广与演绎。造成混沌之美的非线性变换(诸如“面包师”变换、“马蹄”变换、“猫脸”变换)均可用来实现平面或立体构成中的艺术造型<sup>[10]</sup>。

## 3 计算机动画技术

计算机动画技术在应用中,一类是为工程、军事、医学、科学研究服务,这类应用不强调艺术效果;另一类是为影视、广告、教学服务,这时艺术效果和真实感受到格外的关注。但与造型相比,动画的核心是运动,动态的真实性或形式美成为动画的灵魂。

动画中的运动包括了画面上各种要素发生变化的过程,除了角色的运动,还包括景物、色彩、纹理的改变,以及虚拟摄像机的动作。

### 3.1 插值方法

利用关键帧的插值(称为 in between)或变形技术(代表性的为 FFD 方法等<sup>[11]</sup>)表现运动,是取一系列静态造型 $s_0, s_1, \dots, s_n$ 或它们所嵌入的空间 $v_0, v_1, \dots, v_n$ ,然后对 $\{s_j\}$ 或 $\{v_j\}$ 进行调配拟合,前者与造型本身密切相关,后者与造型分离。

### 3.2 物理模型方法

相对于几何方法而言,近年更为引人注目的是基于物理模型的动画技术,它不像几何学方法样,必须对运动状态进行繁琐细心的调整,而是按造型对象的真正物理属性(如质量、弹性、磨擦力等),通过求解运动学或动力学微分方程组来确定其动态变

化。于是,刚体运动、弹性或塑性变形、流体运动方程便成为动画技术的基本出发点。这类基于物理模型的方法,目前已成功地用于表现关节运动、碰撞、碎裂、波动、挤压<sup>[12]-[17]</sup>。

尽管基于物理模型的技术可以生成非常自然逼真的动画,但至今仍未能作为标准方法应用于动画制作。其中最主要的原因是数学物理方程的求解必须用数值方法,而其计算量非常大,如何选择较适合于动画制作的数值方法成为突出的矛盾。对复杂的数学物理微分方程求解问题,往往采用有限元法或差分法。我们认为,差分法具有计算更为简单的优点,适于在动画技术中应用,以 Poisson 方程边值问题为例:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x), x \in \Omega \subset R^2 \\ u &= \varphi_0(x), x \in \Gamma_0; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi_1(x), x \in \Gamma_1 \end{aligned}$$

其中,  $\Omega$  为凸多边形域,边界  $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ ,  $\Gamma_0$  与  $\Gamma_1$  无重叠内部。首先对  $\Omega$  构造三角剖分及其对偶剖分,将上述微分方程转换成积分形式并对它离散化,就可以得到不规则网格上的差分方程组。按广义差分法求解它,再对数据绘图。双曲线及抛物线型方程可以依据同一思想。广义差分法<sup>[18]</sup>将对基于物理模型的动画技术提供一个更有效的算法。

## 4 虚拟、视幻及维数的挑战

计算机艺术的使命在于更好地创造不存在的图形世界。计算机能作到这点,而手工作业是办不到的。这也恰是这个艺术分支的价值所在。虚拟现实(VR—Virtual reality)是溶合数学、计算机科学、视觉生理与心理学于一体的复杂的综合技术,它刚刚兴起就被文化与艺术活动紧紧盯住不放。法国的艺术家用 VR 的简单技术创造了一个黑屋子,参观者可以在这间屋子里看到空中飘浮的一张蓝色的面孔,配合参观者作出眨眼、微笑等表情。在 VR 技术的应用领域中,科学与艺术是难以分开的。

### 4.1 几何复杂性问题

VR 中的动态显示要比目前影视动画中的运动复杂得多,其本质差别在于:影视动画是逐帧放映的结果,它由具有相关性的画面(点集)序列  $s(t_1), s(t_2), \dots, s(t_N)$  组成,其成品不能被欣赏者作任何改变。而在 VR 技术中,要求这种点集序列  $\{s(t_j)\}$  不仅满足通常影视动画中的一切功能,更要使欣赏者进

入这个人造的图形世界,并随欣赏者主观意愿(改变视点、视野,甚至改变景物内容)实时地变化,因而序列  $\{s(t_j)\}$  不仅仅依赖于时间,它还依赖于多个初始状态,每个初始状态的参量的依存域与影响域的分析归结为几何复杂性课题<sup>[19]</sup>。由于 VR 技术中显示的实时性是本质性的要求,于是几何复杂性是当前数学研究亟待解决的问题。

### 4.2 视幻图形与非欧氏几何

视幻艺术是另一类虚拟图形世界,可以将视幻图案、体视及不可能图形归于这类。其共性是利用人的视觉生理与心理特性,在一个特定的图示中使人们可以看到图示之外的幻象。艺术设计中的平面构成与立体构成大量采用这种技法。事实上从数学上说,这是点集、曲线族或曲面族的综合。构成视幻图案的单元是简单的,视觉的冲击力表现在组合复杂性上。随机过程和分布函数是表现这类艺术品的有力工具,可惜的是目前有关构成(平面、立体)设计只局限在手工制作范围,数学工具很少进入,这是值得开发的领域。

体视技术使观察者(经过训练,或借助红蓝眼镜,或使用双目分视的仪器)从平面图案观察到立体景象<sup>[20]</sup>,除了图片的欣赏价值之外,它在地形地貌、建筑物漫游、微观结构观测等方面大有开发应用前景。

不可能图形造成的画面往往令人费解,就连“不可能图形”这一术语也是自相矛盾的:既然你已画出了这个图形,怎么又叫不可能呢?实际上,这指的是图所表示的景物不可能在现实的三维世界中找到原型。例如,荷兰版画家埃舍尔的作品《瀑布》<sup>[21],[22]</sup>,画面上的水明明白白从高处流下,却迂回曲折自然而然地又流到了上游,使你在有限的画面空间上联想时空的无限性。再如,艺术大师毕加索的画,常常将不同视点观察到的对象投影在同一平面上,造成透视上的矛盾<sup>[23]</sup>。可以认为,象埃舍尔,毕加索的这类作品所反映的表现手法涉及到的数学包括拓扑学和非欧几何及 Poincare 平面的几何作图问题。

### 4.3 分形几何

分形技术给计算机艺术增添了新内容。只有用计算机才能揭示分形结构之美。分形之美在于分形体现的无限小尺度中的精细结构,而这种精细结构的一类度量标准是 Hausderff 测度与维数。分形维数(不论哪一种定义)往往不等同于拓扑维数,它可

以不是整数。我们可以按给出的非整数维数去生成分形画面,还可以对一幅画面近似计算它的分形维数(例如相似维数、容量维数等)<sup>[24]-[28]</sup>。

#### 4.4 高维几何作图问题

科学与艺术共同思考高维世界的事物。囿于人类自身生存的空间,直观体察四维以上的事物是困难的。在多元函数的绘图中,已经无法在笛卡儿坐标系中寻找出路,于是提出了这样的非常基本、也非常困难的问题,即如何绘制高维空间的图象? 1986年,A. Inselberg 等人提出“平行轴坐标表现的多维几何”,可以在平面上表示任意 n 维的点。虽然在高维情形是有所方便,但在低维与习惯相悖,影响了它的发展。大多数高维图景的表示仍然是通过投影在低维空间表现其“截面”。80年代美国布朗大学用计算机制作了动画片《拓扑学与力学》,形象地显示了高维球的结构,人们公认这既是科学又是艺术。

#### 5. 创意、鉴赏及审美标准

前面第 1 节谈到了艺术形式三要素,即绘画中的二个单元(造型、色彩)与一个关系(构图)。其中构图处主导地位,在机械零部件绘图中,构图不允许随心所欲;在建筑及规划中,构图有一点灵活性。但与艺术作品相比,后者成为反向的要求,也就是说,构图不能按公式化、概念化的框架去作,否则不成其为创造,而艺术之真谛在于创造<sup>[29]</sup>。创意是艺术作品的核心,虽然目前计算机艺术都集中在制作实现方面,但计算机辅助创意必然是研究的主题。鉴于目前的认识,这个涉及机器智能的艺术创意问题还不能说有非常重大的突破。我们在这里谈的是与创意及鉴赏有关的例子,从中可以看到审美标准是有可能用数学描述的。

众所周知,斐波那契(黄金分割)的数学理论在优化中占有重要地位。人们在构图或鉴赏一件设计时,不时以黄金分割的比例衡量整体与局部是否优美。这是对艺术设计的最古老也是最被广泛接受的数量化标准。由于美是对画面即图象的理解问题,欣赏者之间是千差万别的。对于一个画面,它之所以给人一个初见的美的印象,那是由于画面总体布局达到了某一指标。总体布局也就是绘画语言中所谈的构图,包括画面中造型对象和总体色调的安排。这种总体布局就是图象频谱中的低频分量,可以借助正交变换的分解过程给出数量化研究,但是计算量大

大而不适用。Sasaki 提出了关于“美函数”的概念<sup>[30]</sup>,用矩量的运算研究分布。设  $f(x,y)$  为灰度概率密度函数,满足

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x,y) dx dy = 1$$

$$x,y \in [-1,1] \times [-1,1]$$

图象的各次分布矩可表达成

$$E(x^i y^j) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^i y^j f(x,y) dx dy$$

$$i,j = 0,1,2,3,\dots$$

对于优美的构图,其低阶矩基本上集中在一个定值区域。若  $E$  具有正态分布  $N(E; \mu_i, \sigma_i)$ , 其中  $\mu_i$  与  $\sigma_i^2$  为  $E$  的均值与方差,则一个有趣的事实是:实验表明对于一个具有美感的作品,  $E$  值都很相近,这时  $N(E; \mu_i, \sigma_i)$  有最大值,于是定义反映 12 类低阶矩的美函数

$$B(E) = \prod_{i=1}^{12} N(E; \mu_i, \sigma_i) \\ = \prod_{i=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i}} \exp\left[-\sum_{i=1}^{12} \frac{(E - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right]$$

因而,认为  $B(E)$  是画面美感的一种标志<sup>[30]</sup>。

除了确定的准则,还应以非明晰逻辑为基础,开展模糊数学在艺术中的应用研究。虽然关于审美的标准已有诸如上述的若干进展,然而尚无系统的理论结果。在计算机艺术的研究中,审美、鉴赏(包括作品特征分析及赝品识别等问题)的数学基础是有意义的艰难课题。

#### 参考文献

[1]李政道. 科学与艺术. 见: '93 科学与艺术研讨会演讲. 装饰(工艺美术季刊), 1993, (4).

[2]Foley, J., Van Dam, A., Feiner, S. and Hughes, J., Computer Graphics, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., New York, 1990.

[3]徐培忠(主编). 中国首届计算机艺术学术研讨会论文及作品选集. 北京: 清华大学出版社, 1995.

[4]林梅. 促进电脑与艺术的沟通, 推动崭新领域的应用—关于电脑与艺术的一份调研报告. 科技日报(计算机与通讯周刊), 1995. 3. 22.

[5]孙家昶. 样条函数与计算几何. 北京: 科学出版社, 1982.

[6]唐荣锡, 汪嘉业, 彭群生等. 计算机图形学教程. 北京: 科学出版社, 1990.

[7]齐东旭等. 曲线拟和的数值磨光方法. 数学学报, 1975, 18 (3).

[8]齐东旭. 关于多结点基函数型  $\delta$ -spline 插值(1). 吉林大学(自然科学)学报, 1975, (2).

[9]雷印凯. 设计基础—平面构成. 沈阳: 辽宁美术出版社, 1989.

- [10]齐东旭, 李华山. 计算机艺术与数学结构. 见文献[3]
- [11]Sederberg, T. W. and Parry, S. R., Free-form deformation of solid geometric models, *Computer Graphics*, Vol. 20, No. 4, 1986.
- [12]Hahn, J. K., Realistic animation of rigid bodies, *Computer Graphics*, Vol. 22, No. 4, 1988.
- [13]Boulic, R., Thalmann, N. M. and Thalmann, D., A global human walking model with real-time kinematic personification, *The Visual Computer*, Vol. 6, No. 6, 1992.
- [14]ShiNya, M. and Fournier, A., Stochastic motion - Motion under the influence of wind, *Computer Graphics*, Vol. 11, No. 3, 1992.
- [15]Norton, A., Turk, G., Bacon, B., Gerth, J. and Sweeney, P., Animation of fracture by physical modeling, *The Visual Computer*, Vol. 7, No. 4, 1991.
- [16]Kaas, M. and Miller, G., Rapid, stable fluid dynamics for computer graphics, *Computer Graphics*, Vol. 24, No. 4, 1990.
- [17]Pentland, A. and Williams, J., Good vibrations, model dynamics for graphics and animation, *Computer Graphics*, Vol. 23, No. 3, 1989.
- [18]李荣华, 陈仲英. 微分方程广义差分法. 长春, 吉林大学出版社, 1994.
- [19]F. P. Preparata, M. I. Shamos 著(庄心谷译). 计算几何导论. 北京, 科学出版社, 1990.
- [20]Enterprises, N. E., *Das Magische Auge*, München, 1994.
- [21]Bruno, E., *Der Zauberspiegel des Maurits Cunelis Escher*, TACO, Berlin, 1986.
- [22]Hirstadter, D., Godel, Escher, Bach, An Eternal Golden Braid, Vintage Books, 1979.
- [23]Henderson, L. D., *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art*, Princeton Univer. Press, 1983.
- [24]Mandelbrot, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman San Francisco, 1982.
- [25]K. 法尔克内著(曹文曲等译). 分形几何—数学基础及其应用. 沈阳, 东北工学院出版社, 1991.
- [26]Peitgen, H. O. and Richter, P. H., *The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1986.
- [27]Briggs, J. *Fractals, The Patterns of Chaos, Discovering a New Aesthetic of Art, Science, and Nature*, Simon and Schuster, New York, 1992.
- [28]齐东旭. 分形及其计算机生成. 北京, 科学出版社, 1994.
- [29]戴士和. 画布上的创造. 成都, 四川人民出版社, 1986.
- [30]李介谷等. 图象处理技术. 上海, 上海交通大学出版社, 1990.



李华山, 高级工程师, 1975年毕业于吉林大学数学系计算数学专业, 获理学硕士。现任北方工业大学CAD研究中心副主任, 工业设计专业教研室主任。主要研究方向为计算机图形学和计算数学。

## On The Mathematical Problems In Computer Art

Li Huashan

(CAD research center, North China Univ. of Tech., Beijing 100041)

**Abstract** This paper focuses on some mathematical problems in computer art. Computer art is different from general art works, for its digital structure so mathematical models and methods play important roles in both theoretical and practical research.

This paper provides a general description of some practical techniques, such as geometric modeling, mathematical transformation, iterative scheme, animation and so on. Finally, the mathematical description about aesthetic criterion is also introduced.

**Keywords** Computer art, Mathematical model, Aesthetic criterion